Экзамен по теории вероятностей и математической статистике, 4 семестр.

1. Вероятностное пространство. Операции над событиями. Свойства вероятности.

15-7, 9-10, с4-5 14.17

Def Пространством элементарных исходов или событий называется любое $\Omega \neq \emptyset$.

Def Алгеброй $\mathcal{A}$ называется мн-во подмн-в Ω, облад. след. св-вами:
1) $\Omega \in \mathcal{A}$; 2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$; 3) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

Def σ-алгеброй $\mathcal{F}$ называется мн-во подмн-в Ω, облад. след. св-вами:
1) $\Omega \in \mathcal{F}$; 2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$; 3) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Def Событием или случайным событием называется эл-т алгебры $\mathcal{A}$ или, в более общем случае, σ-алгебры $\mathcal{F}$.

Def Говорят, что σ-алгебра $\mathcal{A}$ порождена классом $\mathcal{K}$, если она является пересечением всех σ-алгебр, содержащих $\mathcal{K}$. $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{K})$.

Def Борелевской σ-алгеброй $\mathcal{B}$ называется σ-алгебра, порожд. мн-вом всех открытых интервалов. Борелевским мн-вом называется эл-т $\mathcal{B}$.

Def $(\Omega, \mathcal{A})$ и $(\Omega, \mathcal{F})$ — измеримые пр-ва, эл-ты $\mathcal{A}$ и $\mathcal{F}$ — измер. мн-ва.

Def Вероятностью или вероятностной мерой называется ф-ция $P: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, удовл. след. аксиомам: 1) $P(A) \geq 0$ $\forall A \in \mathcal{F}$ (неотрицательность);
2) $P(\Omega) = 1$ (нормированность); 3) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, $A_i A_j = \emptyset, i \neq j \Rightarrow P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (σ-аддитивность или счётная аддитивность).

Операции над событиями: сумма $A \cup B$, произведение AB, разность $A \setminus B$

Def Ω — достоверное, $\emptyset = \Omega \setminus \Omega$ — невозможное, $\overline{A} = \Omega \setminus A$ — дополнительное, $AB = \emptyset$ — несовместные.

Св-ва вероятности: 1) $P(\emptyset) = 0$; 2) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; 3) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$;
4) $P(A) \leq 1$ $\forall A \in \mathcal{F}$; 5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$; 6) $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$;
7) $P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Def Тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — <u>вероятностное пространство</u>

T. Счётная аддитивность вер-ти $\Leftrightarrow$ конечная аддит-ть + непр-ть вер-ти на монот. п-ти событий $(B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{F},\ B_{n+1} \subseteq B_n,\ B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbb{P}(B_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(B))$.

Д-во $(\Rightarrow)$ Пусть $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{F}$, $B_{n+1} \subseteq B_n$. Положим $C_n = B_n \setminus B_{n+1}$.

$C_i C_j = \varnothing\ (i \neq j)$. $B_1 = B \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \Rightarrow \mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i)$,

$\forall n \geq 1\quad \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(\bigcup_{i=n}^{\infty} C_i) = \mathbb{P}(B) + \sum_{i=n}^{\infty} \mathbb{P}(C_i) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B) + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{\infty} \mathbb{P}(C_i) = \mathbb{P}(B)$. $\triangledown$

$(\Leftarrow)$ $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, $A_i A_j = \varnothing\ (i \neq j)$. Положим $B_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$.

$B_{n+1} \subseteq B_n$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = \varnothing$. $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) + \mathbb{P}(B_n) =$

$= \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i) + \mathbb{P}(B_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) + \mathbb{P}(\varnothing)$. $\square$

Д-во св-ва 7. $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \overset{?}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$. $B_i := \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$. Тогда $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i B_i$, причём для $i \neq j$ $A_i B_i \cap A_j B_j = \varnothing$. $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

T. (неравенство Бонферрони). $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(A_i))$.

Д-во. $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \mathbb{P}(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}}) = 1 - \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\overline{A_i}) = 1 - \sum_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(A_i))$ $\square$

T. (Каратеодори). Пусть на алгебре $\mathcal{A}$ задана неотр. нормир. конечно-аддит. ф-ция $\mathbb{P}$. Тогда на $\sigma(\mathcal{A})$ $\exists!$ неотр. норм. счётно-аддит. ф-ция $\mathbb{Q}$ | $\forall A \in \mathcal{A}$ $\mathbb{P}(A) = \mathbb{Q}(A)$.

T. (Улам). Единственная мера $\mathbb{P}$ для $(\Omega, 2^{\Omega}, \mathbb{P})$, где Ω континуально, со св-вом $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 0\ \forall \omega \in \Omega$ — тождественный нуль.

15-03

110-11

2. Условная вероятность. Независимость событий. Критерий независимости. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Def Пусть $A, B \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(B) > 0$. <u>Условной вероятностью</u> события A отн. соб. B называется число $\mathbb{P}(A|B) \equiv \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)}$.

Def Пусть $A, B \in \mathcal{A}$. Они называются <u>независимыми</u>, если $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Def События $A_1, \ldots, A_n$ называются <u>независимыми в совокупности</u>, если $\forall m \leq n,\ \forall 1 \leq j_1 < \ldots < j_m \leq n\quad \mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{m} A_{j_k}) = \prod_{k=1}^{m} \mathbb{P}(A_{j_k})$

T. Пусть $\mathbb{P}(B)>0$. Тогда A и B независимы $\Leftrightarrow \mathbb{P}(A|B)=\mathbb{P}(A)$.

Def Пусть $\Omega=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$, $B_iB_j=\varnothing$ $(i\neq j)$, $\mathbb{P}(B_i)>0$. Тогда говорят, что эти мн-ва B_i образуют <u>полную группу</u>.

T. (формула полной вероятности). Пусть события B_i образуют полную группу. Тогда $\mathbb{P}(A)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$.

<u>Д-во.</u> $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}AB_i$, $AB_i\cap AB_j=\varnothing$ $(i\neq j)$ $\Rightarrow \mathbb{P}(A)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(AB_i)=$
$=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$. $\square$

T. (формула Байеса). Пусть $\mathbb{P}(A)>0$ и события B_i, $i=\overline{1,\infty}$, образуют полную группу. Тогда $\mathbb{P}(B_k|A)=\dfrac{\mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k)}{\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}$ $\forall k=\overline{1,\infty}$.

<u>Д-во.</u> $\mathbb{P}(B_k|A)=\dfrac{\mathbb{P}(AB_k)}{\mathbb{P}(A)}\overset{\text{ФПВ}}{=}\dfrac{\mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k)}{\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}$. $\square$

<u>Пример Бернштейна.</u> Пусть есть тетраэдр со сторонами R, G, B, RGB.
События R, G, B попарно независимы, но не явл. независ. в совокупности.

3. Случайные величины. Измеримость функций от случайных величин

Л 14-15
Л 38-39

Def. <u>Случайной величиной</u> называется измеримое отображение $\Omega\to\mathbb{R}$, то есть удовл. след. требованию: $\forall B\in\mathcal{B}$ $\xi^{-1}(B)=\{\omega\,|\,\xi(\omega)\in B\}\in\mathcal{A}$.

T. Пусть $\mathcal{E}$ таково, что $\sigma(\mathcal{E})=\mathcal{B}$. Тогда $\xi(\omega)$ измеримо $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall E\in\mathcal{E}$ $\xi^{-1}(E)\in\mathcal{A}$.

<u>Д-во.</u> $(\Rightarrow)$ Очевидно.

$(\Leftarrow)$ $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{B}$. Пусть $\mathcal{D}=\{B\in\mathcal{B}\,|\,\xi^{-1}(B)\in\mathcal{A}\}$. $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{D}\subseteq\mathcal{B}$.
Убедимся, что $\mathcal{D}$ — σ-алгебра. $\xi^{-1}(\bigcup_\alpha B_\alpha)=\bigcup_\alpha\xi^{-1}(B_\alpha)$,
$\overline{\xi^{-1}(B)}=\xi^{-1}(\overline{B})$. Итак, $\mathcal{D}$ — σ-алгебра. $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{D}\Rightarrow\sigma(\mathcal{E})\subseteq\sigma(\mathcal{D})=$
$=\mathcal{D}\subseteq\mathcal{B}$. Но по условию $\sigma(\mathcal{E})=\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{D}=\mathcal{B}$. $\square$

<u>Следствие.</u> $\xi(\omega)$ — с.в. $\Leftrightarrow$ $\forall x\in\mathbb{R}$ $\{\omega\,|\,\xi(\omega)<x\}\in\mathcal{A}$.

Обозначим $\mathcal{A}_\xi=\{\xi^{-1}(B)\,|\,B\in\mathcal{B}\}$. Уже заметили, что $\mathcal{A}_\xi$ — σ-алгебра.

Def ВП $(\Omega,\mathcal{A}_\xi,\mathbb{P})$ — ВП, <u>порождённое</u> с.в. ξ.

Def. $\mathbb{P}_\xi(B)=\mathbb{P}(\xi^{-1}(B))$ — <u>распределение вероятностей</u> с.в. ξ.

Def ВП $(\mathbb{R},\mathcal{B},\mathbb{P}_\xi)$ — ВП, <u>индуцированное</u> с.в. ξ.

Def. $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *борелевской*, если $\forall B \in \mathcal{B}$ $g^{-1}(B) \in \mathcal{B}$.

T. Пусть ξ — с.в., g — бор. ф-ция. Тогда $\eta(\omega) = g(\xi(\omega))$ — с.в.

Д-во. Пусть $B \in \mathcal{B}$. $\eta^{-1}(B) = \{\omega \mid \eta(\omega) \in B\} = \{\omega \mid g(\xi(\omega)) \in B\} =$
$= \{\omega \mid \xi(\omega) \in g^{-1}(B)\} \in \{g^{-1}(B) \in \mathcal{B}\} \in \mathcal{A} \Rightarrow \eta(\omega)$ — с.в. $\square$

Def. С.в. ξ называется *простой*, если $\exists n \geq 1$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{A} \mid$
$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$, $B_i B_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ и $\xi(\omega) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{1}_{B_i}(\omega)$ $\forall \omega \in \Omega$.

С.в. ξ называется *дискретной*, если $\exists x_1, x_2, \dots \in \mathbb{R}$, $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{A} \mid$
$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$, $B_i B_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ и $\xi(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathbb{1}_{B_i}(\omega)$ $\forall \omega \in \Omega$.

T. $\forall \xi(\omega) \geq 0$ — неотр. с.в. $\exists \{\xi_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty} \mid \xi_n(\omega)$ — простые с.в., $\xi_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi(\omega)$ монотонно $\forall \omega \in \Omega$.

Д-во. $\xi_n(\omega) := \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbb{1}_{\{\omega \mid \frac{k-1}{2^n} \leq \xi(\omega) < \frac{k}{2^n}\}}(\omega)$. $\square$

T. $\forall \xi(\omega)$ — с.в. $\exists \{\xi_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty} \mid \xi_n(\omega)$ — простые с.в., $\xi_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi(\omega)$ $\forall \omega \in \Omega$.

Д-во. Положим $\xi^+(\omega) = \max\{0, \xi(\omega)\}$, $\xi^-(\omega) = -\min\{0, \xi(\omega)\}$.
$\xi = \xi^+ - \xi^-$. Для ξ^+ и ξ^- восп. ~~пред.~~ теоремой.

Пусть есть п-ть с.в. $\xi_1, \xi_2, \dots$

1. $\xi = \sup_n \xi_n$ — с.в.: $\forall x$ $\{\omega \mid \xi(\omega) \leq x\} = \bigcap_n \{\omega \mid \xi_n(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$.
2. $\xi = \inf_n \xi_n$ — с.в.: $\forall x$ $\{\xi \geq x\} = \bigcap_n \{\xi_n \geq x\} \in \mathcal{A}$.
3. $\xi = \overline{\lim_{n\to\infty}} \xi_n$ — с.в.: $\overline{\lim_{n\to\infty}} \xi_n = \inf_m \sup_{n \geq m} \xi_n$.
4. $\xi = \underline{\lim_{n\to\infty}} \xi_n$ — с.в.: $\underline{\lim_{n\to\infty}} \xi_n = \sup_m \inf_{n \geq m} \xi_n$.
5. $\xi = \lim_{n\to\infty} \xi_n$ — с.в.: $\{\omega \mid \xi(\omega) < x\} = \{\omega \mid \overline{\lim_{n\to\infty}} \xi_n(\omega) = \underline{\lim_{n\to\infty}} \xi_n(\omega)\} \cap \{\underline{\lim_{n\to\infty}} \xi_n < x\} =$
$= \{\omega \mid \underline{\lim_{n\to\infty}} \xi_n(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$.
6. Сумма с.в. — с.в., т.к. сумма простых с.в. — простая с.в.
7. Разность с.в. — с.в., произведение с.в. — с.в.
8. Частное с.в. — с.в.: $\zeta_n = \frac{\xi_n}{\eta_n}$ всего не получится, т.к. η_n может равняться нулю $\Rightarrow$ возьмём $\zeta_n = \frac{\xi_n}{\eta_n + \frac{1}{n}\mathbb{1}(\eta_n = 0)}$.

4. Функция распределения, её свойства. Дискретные, сингулярные и абсолютно непрерывные функции распределения и случайные величины. Плотность распределения. Теорема Лебега о разложении функции распределения.

119, 25-26

Пусть $\xi: \Omega \to \mathbb{R}$ — с.в.

Def. Функция $F_\xi(x) = P_\xi((-\infty, x)) = \mathbb{P}(\{\omega \mid \xi(\omega) < x\})$ называется функцией распределения случайной величины ξ.

Св-ва. ① $0 \leq F_\xi(x) \leq 1$.

② $x < y \Rightarrow F_\xi(x) \leq F_\xi(y)$: $\{\xi < y\} = \{\xi < x\} \cup \{x \leq \xi < y\}$.

③ $\lim\limits_{x_n \to x-} F_\xi(x_n) = F_\xi(x)$: $\{\xi < x\} = \{\xi < x_n\} \cup \underbrace{\{x_n \leq \xi < x\}}_{A_n}$, $\mathbb{P}(A_n) \to 0$

④ $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1$.

Def. Функция распределения с.в. ξ F_ξ называется абсолютно непрерывной, если $\exists f(x) \geq 0 \mid \forall x$ $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(y)\,dy$. $f(x)$ — плотность распр-е с.в. ξ.

Def. Точка x называется точкой роста ф-ции F, если для любого дост. малого $\varepsilon > 0$ $F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon) > 0$.

Def. F_ξ называется сингулярной ф-цией распределения, если она непрерывна и мн-во её точек роста имеет меру нуль.

T. Лебега. $\forall$ ф. р. $F(x)$ представима в виде $F(x) = a_1 F_1(x) + a_2 F_2(x) + a_3 F_3(x)$, $a_i \geq 0$, $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, где $F_1(x)$ — дискретная ф.-р., $F_2(x)$ — абс. непр. ф.р., $F_3(x)$ — синг. ф. р.

Если все $a_i \neq 0$, то это представление единственно.

5. Числовые характеристики случайных величин: математическое ожидание, моменты, квантили, медиана. Их свойства

129-31, 34

Def $\mathbb{E}\xi = \int\limits_{\Omega} \xi \, d\mathbb{P} = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$ — математическое ожидание с. в. ξ.

$d\omega$ — мн-во тех ω, ξ от к-рых попало в небольшой интервал на области значений

Тогда $\mathbb{E}\xi = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \{x := \xi(\omega)\} = \int x\, \mathbb{P}_\xi(dx) = \int x\, dF_\xi(x)$.

С.в. ξ принимает значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ с вер-тями $p_1, \dots, p_n \Rightarrow \mathbb{E}\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i$.

ξ абс. непрерывна, её плотность — $p_\xi(x) \Rightarrow \mathbb{E}\xi = \int x p_\xi(x)\,dx$

$\xi = \xi^+ - \xi^-$, $|\xi| = \xi^+ + \xi^- \Rightarrow$ $|\mathbb{E}\xi| < \infty \Leftrightarrow \mathbb{E}|\xi| < \infty$.

Будем говорить, что $\mathbb{E}\xi$ не определено, если хотя бы одно из $\mathbb{E}\xi^+, \mathbb{E}\xi^-$ бесконечно.

Св-ва 1) $\mathbb{E}(a\xi + b) = a\mathbb{E}\xi + b$; 2) $\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta$, если $\forall$ два из этих трёх объектов существуют; 3) $\mathbb{E}\mathbb{1}(A) = 1\cdot\mathbb{P}(A) + 0\cdot\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(A)$;
4) $|\mathbb{E}\xi| \le \mathbb{E}|\xi|$; 5) $\mathbb{P}(\xi < \eta) = 1 \Rightarrow \mathbb{E}\xi \le \mathbb{E}\eta$; 6) $\xi \ge 0$, $\mathbb{E}\xi = 0 \Rightarrow \xi \overset{\text{п.н.}}{=} 0$.

Def Число $l_\xi(q)$ называется квантилью с. в. ξ порядка q, если
$\mathbb{P}(\xi \le l_\xi(q)) \ge q$, $\mathbb{P}(\xi \ge l_\xi(q)) \ge 1 - q$.

$\mathbb{E}|\xi - \mathrm{med}\,\xi| \le \mathbb{E}|\xi - a|\ \forall a$

Def Квантиль порядка $q = 1/2$ называется медианой с. в. ξ: $\mathrm{med}\,\xi = l_\xi(1/2)$.
Квантиль порядка $q: 1/4$ — квартиль, $q: 1/10$ — дециль, $q: \frac{1}{100}$ — перцентиль.

Def Моментом (начальным) с. в. ξ порядка k называется число $\mathbb{E}\xi^k$.
Центральным моментом с. в. ξ порядка k называется число $\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^k$.

6. Числовые характеристики случайных величин: дисперсия, ковариация, коэффициент корреляции. Их свойства

134-36

Def Дисперсия $\mathbb{D}\xi$ — центр. момент с. в. ξ 2-го порядка.

Св-ва 1) $\mathbb{D}\xi \ge 0$; 2) $\mathbb{D}(a\xi + b) = a^2\mathbb{D}\xi$; 3) $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2$;
4) $\mathbb{D}\xi = 0 \Leftrightarrow \xi \overset{\text{п.н.}}{=} \mathrm{const}$.

Def Величина $\mathbb{E}\xi\eta - \mathbb{E}\xi\cdot\mathbb{E}\eta = \mathrm{Cov}(\xi, \eta)$ называется ковариацией с. в. ξ и η.
$\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta))$.

Утв. $\mathbb{D}(\xi+\eta)=\mathbb{D}\xi+\mathbb{D}\eta+2\mathrm{Cov}(\xi,\eta)$, $\mathbb{D}(\xi-\eta)=\mathbb{D}\xi+\mathbb{D}\eta-2\mathrm{Cov}(\xi,\eta)$.

Д-во. $\mathbb{D}(\xi+\eta)=\mathbb{E}(\xi+\eta)^2-(\mathbb{E}(\xi+\eta))^2=\mathbb{E}(\xi^2+\eta^2+2\xi\eta)-$
$-((\mathbb{E}\xi)^2+(\mathbb{E}\eta)^2+2\mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta)=\mathbb{E}\xi^2-(\mathbb{E}\xi)^2+\mathbb{E}\eta^2-(\mathbb{E}\eta)^2+$
$+2(\mathbb{E}\xi\eta-\mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta)=\mathbb{D}\xi+\mathbb{D}\eta+2\mathrm{Cov}(\xi,\eta)$. □

Def. С.в. ξ и η называются независимыми, если $\forall B_1,B_2\in\mathcal{B}$ $\mathbb{P}(\xi\in B_1,\eta\in B_2)=\mathbb{P}(\xi\in B_1)\mathbb{P}(\eta\in B_2)$.

Утв. ξ и η независимы $\Rightarrow$ $\mathbb{E}\xi\eta=\mathbb{E}\eta\,\mathbb{E}\xi$.

Д-во приведём для дискретных с.в. Пусть $\xi=x_1,\ldots,x_n$, $\eta=y_1,\ldots,y_m$.
$\mathbb{E}\xi\eta=\sum_{i,j}x_iy_j\mathbb{P}(\xi=x_i,\eta=y_j)=\sum_{i,j}x_iy_j\mathbb{P}(\xi=x_i)\mathbb{P}(\eta=y_j)=\mathbb{E}\xi\,\mathbb{E}\eta$. □

Следствие. ξ и η независимы $\Rightarrow$ $\mathrm{Cov}(\xi,\eta)=0$.

Следствие. ξ и η независимы $\Rightarrow$ $\mathbb{D}(\xi\pm\eta)=\mathbb{D}\xi+\mathbb{D}\eta$.

Def. $\sqrt{\mathbb{D}\xi}$ — среднеквадратичное отклонение с.в. ξ.

$\rho(\xi,\eta)=\frac{\mathrm{Cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathbb{D}\xi\mathbb{D}\eta}}$ — коэффициент корреляции.

Утв. $|\rho|\le 1$.

Д-во. Используем то, что $\mathbb{D}\xi=\mathrm{Cov}(\xi,\xi)$ и нер-во КБ для $\mathrm{Cov}(\xi,\eta)$. □

7. Совокупности случайных величин, случайные векторы. Совместная функция распределения. Независимость случайных величин. Критерий независимости

152-54 10:32

Пусть есть базовое ВП $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. Рассм. некий в.р. $\vec{\xi}=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$, координаты к-рого — с.в. $\vec{\xi}:\Omega\to\mathbb{R}^n$. В $\mathbb{R}^n$ введём борелевскую σ-алгебру $\mathcal{B}_n$ — σ-алгебру, порождённую мн-вом параллелепипедов (или открытых шаров).

Def. $\vec{\xi}$ — случайный вектор, если $\forall B\in\mathcal{B}_n$ $\vec{\xi}^{-1}(B)\in\mathcal{A}$.

Def. Ф-ция распределения случ. в-ра $\vec{\xi}$ — $F_{\vec{\xi}}(x)=F_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_n)=$
$=\mathbb{P}(\{\omega\mid\xi_1(\omega)<x_1,\ldots,\xi_n(\omega)<x_n\})$.

Св-ва 1) $0\le F_{\vec{\xi}}(x)\le 1$; 2) $F_{\vec{\xi}}(x)$ монотонна по $\forall$ аргументу;
3) непрер. слева по $\forall$ аргументу; 4) при $x_k\to-\infty$ $F_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_n)\to 0$, $k=\overline{1,n}$;
5) при $x_k\to+\infty$ $F_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_n)\to F_{\xi_1,\ldots,\xi_{k-1},\xi_{k+1},\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_n)$.

Утв. Компоненты $\vec{\xi}$ независимы $\Leftrightarrow$ ф.р. $\vec{\xi}$ факторизуется в произведение ф.р. от компонент.

(**Def** С.в. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называются *независимыми*, если $\forall B_i \in \mathcal{B},\ i = \overline{1,n}$,
$\mathbb{P}(\xi_1 \in B_1, \ldots, \xi_n \in B_n) = \mathbb{P}(\xi_1 \in B_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(\xi_n \in B_n)$.)

Def Если $\exists p(x) \geq 0 \mid \forall B \in \mathcal{B}_n\ \mathbb{P}(\vec{\xi} \in B) = \int_B p(x)\,dx$, то она называется *(совместной) плотностью* с. в-ра $\vec{\xi}$.

Если $\vec{\xi}_i^{\,!} = (\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_n)$, то $p_{\vec{\xi}_i^{\,!}} = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx_i$. (*)

Def Распределение любого собств. подм-ва компонент случ. в-ра называется *маргинальным*.

Пусть имеется с.в. $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и гладкие ф-ции $y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_n = f_n(x_1, \ldots, x_n)$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $\eta = f(\vec{\xi})$. Хотим, зная $p_\xi(x)$, выразить $p_\eta(x)$.

$Df(x) = \det \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j},\ i,j = \overline{1,n} \right\|$ — якобиан. $Df(x) \neq 0 \Rightarrow \exists f^{-1}(y)$.

$Df(x) \cdot Df^{-1}(y)\big|_{y = f(x)} = 1$. $\int_B \varphi(x)\,dx = \int_{f^{-1}(B)} \varphi(f(x))\,|Df(x)|\,dx$.

Утв. $p_\eta(x) = p_\xi(f^{-1}(x)) \cdot |Df^{-1}(x)|$.

Д-во. Возьмём произвольное $B \in \mathcal{B}_n$. $\int_B p_\xi(f^{-1}(x))\,|Df^{-1}(x)|\,dx =$
$= \int_{f^{-1}(B)} p_\xi(f^{-1}(f(x))) \cdot |Df^{-1}(f(x))| \cdot |Df(x)|\,dx = \int_{f^{-1}(B)} p_\xi(x)\,dx = \mathbb{P}(\vec{\xi} \in f^{-1}(B)) =$
$= \mathbb{P}(\eta \in B) \Rightarrow p_\xi(f^{-1}(x)) \cdot |Df^{-1}(x)|$ — плотность η. $\square$

Утв. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые с.в. Тогда $p_{\xi_1 + \xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}(x-y)\,p_{\xi_2}(y)\,dy$.

Д-во. Положим $f: (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_2)$. Тогда $f^{-1}: (x_1, x_2) \mapsto (x_1 - x_2, x_2)$.
$|Df^{-1}(x)| = 1$. $p_{\xi_1 + \xi_2, \xi_2}(x_1, x_2) = p_{\xi_1, \xi_2}(x_1 - x_2, x_2) \cdot 1 \overset{(*)}{\Rightarrow}$
$\overset{(*)}{\Rightarrow} p_{\xi_1 + \xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1, \xi_2}(x-y, y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}(x-y)\,p_{\xi_2}(y)\,dy$. $\square$

Следствие. $F_{\xi_1 + \xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\xi_1}(x-y)\,dF_{\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\xi_2}(x-y)\,dF_{\xi_1}(y)$.

10:47

8. Виды сходимости последовательностей случайных величин

148-49, 51-52

Пусть есть с.в. $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$, заданные на ВП $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Def П-ть $\{\xi_n\}$ *сходится* к ξ при $n \to \infty$ *по вероятности* ($\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \xi$), если $\forall \varepsilon > 0$ $\mathbb{P}(\{\omega \mid |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Def П-ть $\{\xi_n\}$ *сходится* к ξ *почти наверное* ($\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \xi$), если
$\mathbb{P}(\{\omega \mid \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\}) = 1$.

Def П-ть $\{\xi_n\}$ *сходится* к ξ *в среднем порядка* $\alpha > 0$ ($\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_\alpha} \xi$), если
$\mathbb{E}|\xi_n - \xi|^\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Def П-ть $\{\xi_n\}$ *сходится* к ξ *по распределению*, если $F_{\xi_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_\xi(x)$ $\forall x$, явл. точкой непрер-ти $F_\xi(x)$.

$$\begin{tikzcd} \text{п.н.} \arrow[dr, Rightarrow] & & \\ & \mathbb{P} \arrow[r, Rightarrow] & d \\ L_2 \arrow[ur, Rightarrow] & & \end{tikzcd}$$

<u>Утв.</u> Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi$ — с.в., $\eta_1, \ldots :$ $\eta_n = \sup\limits_{k \geq n} |\xi_k - \xi|$.

Тогда $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Leftrightarrow \eta_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

<u>Д-во.</u> Фикс. $\varepsilon > 0$. Положим $A_n^\varepsilon = \{\omega \mid |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon\}$, $A^\varepsilon = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k \geq n} A_k^\varepsilon$.

$\{\omega \mid \eta_n \geq \varepsilon\} = \bigcup\limits_{k \geq n} A_k^\varepsilon$. $\xi_n(\omega) \not\to \xi(\omega) \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \mid \forall n \ \exists k \geq n \mid |\xi_k - \xi| \geq \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\omega \mid \xi_n(\omega) \not\to \xi(\omega)\} = \bigcup\limits_{\varepsilon > 0} A^\varepsilon$. По св-ву непр-ти вер-ти

$\mathbb{P}(A^\varepsilon) = \lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}(\bigcup\limits_{k \geq n} A_k^\varepsilon)$. Итак, $\mathbb{P}(\{\omega \mid \xi_n(\omega) \not\to \xi(\omega)\}) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(\bigcup\limits_{\varepsilon > 0} A^\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(\bigcup\limits_{m \geq 1} A^{1/m}) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(A^{1/m}) = 0 \ \forall m \geq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(A^\varepsilon) = 0 \ \forall \varepsilon > 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(\bigcup\limits_{k \geq n} A_k^\varepsilon) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \ \forall \varepsilon > 0 \Leftrightarrow \eta_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}} 0$. $\square$

<u>Утв.</u> (без д-ва). Из любой п-ти с.в., сх. по вер-ти, можно выделить подп-ть, сх. почти наверное к той же с.в.

<u>Def</u> ~~Гов~~ Говорят, что $\{\xi_n\}$ <u>сходится</u> к ξ <u>слабо</u> ($\xi_n \xrightarrow{w} \xi$), если

$\forall$ непрер. огр. $f(x)$ $\mathbb{E} f(\xi_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbb{E} f(\xi)$.

В хороших конечномерных ситуациях $d \Leftrightarrow w$. 11:11

9. Неравенства Маркова и Чебышёва. Закон больших чисел в форме Чебышёва

136,39

<u>Неравенство Маркова.</u> Пусть с.в. $\xi \geq 0$ и $\varepsilon > 0$. Тогда $\mathbb{P}(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}\xi}{\varepsilon}$.

<u>Д-во.</u> $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}(\xi \mathbb{1}(\xi \geq \varepsilon) + \xi \mathbb{1}(\xi < \varepsilon)) = \mathbb{E}(\xi \mathbb{1}(\xi \geq \varepsilon)) + \mathbb{E}(\xi \mathbb{1}(\xi < \varepsilon)) \geq$

$\geq \mathbb{E}(\xi \mathbb{1}(\xi \geq \varepsilon)) \geq \mathbb{E}(\varepsilon \mathbb{1}(\xi \geq \varepsilon)) = \varepsilon \mathbb{P}(\xi \geq \varepsilon) \Rightarrow \mathbb{P}(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}\xi}{\varepsilon}$. $\square$

<u>Следствие.</u> Пусть с.в. $\xi \geq 0$ и $\varepsilon > 0$. Тогда $\mathbb{P}(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}\xi^k}{\varepsilon^k}$, ~~$k \in \mathbb{N}$~~ $k \in \mathbb{R}$.

<u>Неравенство Чебышёва.</u> Пусть $\mathbb{E}\eta^2 < \infty$, $\varepsilon > 0$. Тогда $\mathbb{P}(|\eta - \mathbb{E}\eta| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{D}\eta}{\varepsilon^2}$.

<u>Д-во.</u> Положим $\xi = (\eta - \mathbb{E}\eta)^2$ и применим сл-е неравенство Маркова для ε^2:

$\mathbb{P}((\eta - \mathbb{E}\eta)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{\mathbb{E}(\eta - \mathbb{E}\eta)^2}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{D}\eta}{\varepsilon^2}$. $\varepsilon > 0 \Rightarrow \mathbb{P}(|\eta - \mathbb{E}\eta| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}((\eta - \mathbb{E}\eta)^2 \geq \varepsilon^2)$. $\square$

<u>ЗБЧ в форме Чебышёва.</u> Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — н.о.р. с.в., $\eta_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^n \xi_i$,

$\mathbb{E}\xi_i = a$, $\mathbb{D}\xi_i = \sigma^2 < \infty$. Тогда $\mathbb{P}(|\eta_n - a| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

<u>Д-во.</u> Применим нер-во Чебышёва для $\eta = \eta_n$. $\square$ 11:34

11:14

10. Неравенство Йенсена

136

Неравенство Йенсена. Пусть $g(x)$ выпукла вниз. Тогда $\mathbb{E}g(\xi) \geq g(\mathbb{E}\xi)$.

Д-во. $g(x)$ вып. вниз $\Rightarrow \forall x_0 \; \exists \lambda(x_0) \mid g(x) \geq g(x_0) + (x-x_0)\lambda(x_0)$.

Положим $x = \xi$, $x_0 = \mathbb{E}\xi \Rightarrow g(\xi) \geq g(\mathbb{E}\xi) + (\xi - \mathbb{E}\xi)\lambda(\mathbb{E}\xi) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\mathbb{E}\cdot\} \Rightarrow \mathbb{E}g(\xi) \geq g(\mathbb{E}\xi) + \lambda(\mathbb{E}\xi)\underbrace{\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)}_{0} = g(\mathbb{E}\xi)$. □

Неравенство Ляпунова. $\mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi| \leq \sqrt{\mathbb{D}\xi}$.

Д-во. В неравенстве Йенсена положим $g(x) = x^2$, $\xi = |\xi - \mathbb{E}\xi|$:

~~$\mathbb{E}\xi^2 \geq (\mathbb{E}\xi)^2$~~ $\quad \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 \geq (\mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi|)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi| \leq \sqrt{\mathbb{D}\xi}$. □

11:50

11. Характеристические функции и их свойства. Закон больших чисел в форме Хинчина.

135-58

Def Пусть есть с.в. ξ. $f_\xi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi} = \mathbb{E}\cos t\xi + i\mathbb{E}\sin t\xi$ — **характеристическая функция** с.в. ξ.

Если $p_\xi(x)$ — плотность ξ, то $f_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p_\xi(x)\,dx$.

Св-ва. ① $f_\xi(t)$ определена $\forall t$: $f_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\,dF_\xi(x) \Rightarrow |f_\xi(t)| \leq 1$.

② $f_\xi(0) = 1$.

③ $f_\xi(t)$ равномерно непрерывна.

Д-во. Рассм. произв. $\varepsilon > 0$ и покажем, что для дост. малого h $\forall t \; |f_\xi(t+h) - f_\xi(t)| < \varepsilon$.

$|f_\xi(t+h) - f_\xi(t)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i(t+h)x} - e^{itx})\,dF_\xi(x)\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{itx}| \cdot |e^{ihx} - 1|\,dF_\xi(x) =$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{ihx} - 1|\,dF_\xi(x) = \int_{|x|\leq M} |e^{ihx} - 1|\,dF_\xi(x) + \int_{|x|>M} |e^{ihx} - 1|\,dF_\xi(x)$.

$\int_{|x|>M} |e^{ihx} - 1|\,dF_\xi(x) \leq 2\int_{|x|>M} dF_\xi(x) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}(|x|>M)\,dF_\xi(x) = 2\mathbb{P}(|\xi| > M) < \frac{\varepsilon}{2}$

для нек-рого M по св-вам ф-ции распределения.

$\int_{|x|\leq M} |e^{ihx} - 1|\,dF_\xi(x) < \frac{\varepsilon}{2}$ для нек-рого h в силу огр-ти x. □

④ Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые с.в. Тогда $f_{\xi_1+\xi_2}(t) = f_{\xi_1}(t) f_{\xi_2}(t)$.

Д-во. $f_{\xi_1+\xi_2}(t) = \mathbb{E}e^{it(\xi_1+\xi_2)} = \mathbb{E}(e^{it\xi_1}e^{it\xi_2}) = \mathbb{E}e^{it\xi_1} \cdot \mathbb{E}e^{it\xi_2} = f_{\xi_1}(t) f_{\xi_2}(t)$. □

⑤ $f_{a\xi+b}(t) = e^{itb} f_\xi(at)$.

⑥ $f_{-\xi}(t) = f_\xi(-t) = \mathbb{E}\cos t\xi - i\mathbb{E}\sin t\xi = \overline{f_\xi(t)}$.

(7) (следствие) Если $\xi \overset{d}{=} -\xi$ (т.е. ξ имеет симметричное распределение), то $f_\xi(t)$ вещественна и чётна (т.к. cos чётен).

(8) $f_\xi(t) \leftrightarrow F_\xi(t)$: <u>формула обращения:</u> $F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1) = \frac{1}{2\pi} \lim\limits_{A\to\infty} \int\limits_{-A}^{A} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} f_\xi(t)\,dt$ (без д-ва).

<u>Т. Пуассона.</u> 1. Пусть есть с.в. $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и $f_{\xi_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(t) \in C(\{0\})$.

Тогда $f(t) = f_\xi(t)$ — х.ф. некоторой с.в. ξ и $\forall x\ F_{\xi_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_\xi(x) \in C(\mathbb{R})$.

2. Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ — с.в. и $\xi_n \xrightarrow{w} \xi$. Тогда $f_{\xi_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_\xi(t)$ равномерно внутри $\mathbb{R}$.

(9) Пусть $\mathbb{E}|\xi|^k < \infty$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\exists f_\xi^{(k)}(t)$, $f_\xi^{(k)}(t) \in C(\mathbb{R})$ и $f_\xi^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}\xi^k$.

<u>Д-во</u> проведём по индукции для абс. непр. с.в. Пусть $\xi \sim p_\xi(x)$.

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} ixe^{itx} p_\xi(x)\,dx\right| \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|\, p_\xi(x)\,dx = \mathbb{E}|\xi| < \infty.$$

$f_\xi'(t) = i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{itx} p_\xi(x)\,dx$, $f_\xi'(0) = i\mathbb{E}\xi$. Индукт. переход очевиден. $\square$

По ф-ле Тейлора с ост. членом в форме Пеано $f_\xi(t) = 1 + it\mathbb{E}\xi + t\varepsilon(t)$, $\varepsilon(t) \underset{t\to 0}{=} o(1)$ $(k=1)$, $f_\xi(t) = 1 + it\mathbb{E}\xi - \frac{t^2}{2}\mathbb{E}\xi^2 + t^2\varepsilon(t)$, $\varepsilon(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$.

<u>ЗБЧ в форме Хинчина.</u> Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — н.о.р. с.в., $\mathbb{E}\xi_1 = a$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i - a\right| < \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

<u>Д-во.</u> $f_{\xi_1}(t) = 1 + ita + t\varepsilon(t)$, $\eta_n := \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$. $f_{\xi_1+\ldots+\xi_n}(t) = (1 + ita + t\varepsilon(t))^n$.

По св-ву 5 $f_{\eta_n}(t) = \left(1 + ia\frac{t}{n} + \frac{t}{n}\varepsilon(t/n)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{iat}$ $\Rightarrow$ имеет место слабая сх-ть η_n к a. $F_a(x) = \begin{cases} 0, & x \le a; \\ 1, & x > a. \end{cases}$ $\mathbb{P}(|\eta_n - a| < \varepsilon) =$

$= \mathbb{P}(a - \varepsilon < \eta_n < a + \varepsilon) \ge \mathbb{P}\left(a - \frac{\varepsilon}{2} \le \eta_n < a + \varepsilon\right) = F_{\eta_n}(a+\varepsilon) - F_{\eta_n}\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{}$

$\xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - 0 = 1$. $\square$ 13-14

12. Центральная предельная теорема

159

<u>ЦПТ для н.о.р. с.в.</u> Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — н.о.р. с.в., $\mathbb{E}\xi_1 = a$, $0 < \mathbb{D}\xi_1 = \sigma^2 < \infty$,

$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Тогда $\mathbb{P}\left(\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,du$.

<u>Д-во.</u> Заметим, что $\mathbb{E}S_n = na$, $\mathbb{D}S_n = n\sigma^2 \Rightarrow \mathbb{E}\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} = 0$, $\mathbb{D}\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} = 1$.

Вычислим х.ф. норм. расп. $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \underbrace{e^{-x^2/2}}_{\text{чёт.}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos tx\, e^{-x^2/2}\,dx$.

$f'(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\sin tx\, e^{-x^2/2}\,dx \overset{\text{по частям}}{=\!=} -t f(t)$ — ДУ, $f(0) = 1 \Rightarrow f(t) = e^{-t^2/2}$

Осталось д-ть, что х.ф. $\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \to e^{-t^2/2}$. $\eta_n = \frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\xi_j - a}{\sigma\sqrt{n}}$.

$f_{\xi_1 - a}(t) = 1 + i\mathbb{E}(\xi_1 - a)t - \frac{1}{2}t^2\mathbb{E}(\xi_1 - a)^2 + t^2\varepsilon(t) = 1 - \frac{t^2\sigma^2}{2} + t^2\varepsilon(t) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{E}e^{it\eta_n} = \left(1 - \frac{t^2\sigma^2}{2\sigma^2 n} + \frac{t^2}{\sigma^2 n}\varepsilon\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-t^2/2}$. □

Следствие (т. Муавра–Лапласа) Пусть $\xi \sim Bi(n,p)$. Тогда $\mathbb{P}\left(\frac{\xi - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}du$.
Док-во $a = p$, $\sigma^2 = p(1-p)$. □

23:45

13. Условное математическое ожидание

165–66

Дискретный случай. Пусть $\xi: x_1, x_2, \dots$; $\eta: y_1, y_2, \dots$

$\mathbb{P}(\xi = x_j \mid \eta = y_k) = \frac{\mathbb{P}(\xi = x_j, \eta = y_k)}{\mathbb{P}(\eta = y_k)}$. При $\forall$ фикс. k эти числа для $j = \overline{1,\infty}$ — набор вер-тей, их сумма $= 1$

Def $\mathbb{E}(\xi \mid \eta = y_k) = \sum_j x_j \mathbb{P}(\xi = x_j \mid \eta = y_k) = f(y_k)$ — условное математическое ожидание с.в. ξ при условии $\eta = y_k$.

Def Говорят, что σ-алгебра $\mathcal{F}$ порождена с.в. η, если $\mathcal{F} = \{\eta^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$.
Полученное усл. м.о. как ф-ция от y_k измерима отн. σ-алгебры, порожд. η.
$\mathbb{E}(\xi \mid \eta) = f(\eta): \Omega \to \mathbb{R}$.

Зафикс. $B \in \mathcal{B}$. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\eta)\mathbb{1}(\eta \in B)) = \sum_{j: y_j \in B} f(y_j)\mathbb{P}(\eta = y_j) =$ (*)
$= \sum_{j: y_j \in B}\sum_k x_k \frac{\mathbb{P}(\xi = x_k, \eta = y_j)}{\mathbb{P}(\eta = y_j)} \cdot \mathbb{P}(\eta = y_j) = \sum_{j: y_j \in B}\sum_k x_k \mathbb{P}(\xi = x_k, \eta = y_j) = \mathbb{E}(\xi\mathbb{1}(\eta \in B))$.

Абсолютно непрерывный случай. ξ, η — с.в., их распределение задается совместной плотностью $p_{\xi,\eta}(x,y)$. Выберем малое $\varepsilon > 0$
$\mathbb{P}(\xi < x \mid y \le \eta < y + \varepsilon) = \frac{\mathbb{P}(\xi < x, y \le \eta < y+\varepsilon)}{\mathbb{P}(y \le \eta < y+\varepsilon)} = \frac{\int_{-\infty}^{x}\int_{y}^{y+\varepsilon} p_{\xi,\eta}(x,\tilde{y})d\tilde{y}dx}{\int_{y}^{y+\varepsilon} p_\eta(\tilde{y})d\tilde{y}} =$
$= \{$предп., что подынтегр. ф-ции таковы, что вып. усл. т. о среднем$\} =$
$= \frac{\int_{-\infty}^{x}\varepsilon \cdot p_{\xi,\eta}(x,y')dx}{\varepsilon \cdot p_\eta(y'')} = \frac{\int_{-\infty}^{x} p_{\xi,\eta}(x,y')dx}{p_\eta(y'')} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_{-\infty}^{x}\frac{p_{\xi,\eta}(x,y)}{p_\eta(y)} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ положим $p_{\xi|\eta=y} = \frac{p_{\xi,\eta}(x,y)}{p_\eta(y)}$ — условная плотность

Def $\int_{-\infty}^{\infty} x p_{\xi|\eta=y}(x)dx = \mathbb{E}(\xi \mid \eta = y) = f(y)$ — условное м.о. ξ при усл. $\eta = y$.
$\mathbb{E}(\xi|\eta) = f(\eta)$ — с.в. Проверим ф-лу (*). $\mathbb{P}(\mathbb{E}(\xi|\eta) \in B) = \mathbb{P}(\eta \in f^{-1}(B))$.
$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\eta)\mathbb{1}(\eta \in B)) = \mathbb{E}(f(\eta)\mathbb{1}(\eta \in B)) = \int_B f(y)p_\eta(y)dy = \int_B\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{p_{\xi,\eta}(x,y)}{p_\eta(y)}dx\, p_\eta(y)dy =$
$= \int_B\int_{-\infty}^{+\infty} x p_{\xi,\eta}(x,y)dxdy = \mathbb{E}(\xi\mathbb{1}(\eta \in B))$.

Общий случай. Пусть есть ВП $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ и σ-алгебра $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$. ξ — с.в. на этом в.п.

Def Усл. м.о. ξ отн. σ-алгебры $\mathcal{F}$ $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F})$ — с.в., облад. 2 свойствами:
1) $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F})$ измер. отн. $\mathcal{F}$; 2) $\forall A \in \mathcal{F}$ $\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F})\mathbb{1}(A)) = \mathbb{E}(\xi\mathbb{1}(A))$.

$\nu(A) := \mathbb{E}(\xi \mathbb{1}(A))$. $\mathbb{P}(A)=0 \Rightarrow \nu(A)=0$, т.е. ν абс. непр. отн. $P \Rightarrow$ по т. Радона — Никодима $\exists f(\omega)\ \big|\ \nu(A) = \mathbb{E}(\xi \mathbb{1}(A)) = \int_A f(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega)$. $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}) := f(\omega)$.

Def $\underline{\mathbb{E}(\xi|\eta)} = \mathbb{E}(\xi|\sigma(\eta))$, где $\sigma(\eta)$ — σ-алгебра, порожд. с.в. η.

Св-ва 1) $\mathbb{E}(a\xi + b\eta \mid \mathcal{F}) = a\,\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}) + b\,\mathbb{E}(\eta|\mathcal{F})$.

2) Если η — $\mathcal{F}$-измеримая с.в., то $\mathbb{E}(\xi\eta|\mathcal{F}) = \eta\,\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F})$.

3) ξ и η независимы $\Rightarrow \mathbb{E}(\xi|\eta) = \mathbb{E}\xi$. 4) $\mathbb{E}\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}) = \mathbb{E}\xi$.

$\mathbb{P}(A|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}(A)|\mathcal{F})$ — условная вероятность события A. 14:22

14. Статистическая структура. Выборка. Статистика.

108

Def $\underline{\text{Статистическая структура}}$ — тройка $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, $\mathcal{P} = \{P\}$.

Def $\underline{\text{Выборка}}$ — вектор с.в. $X = (X_1, \dots, X_n)$, в кот. каждая с.в. описывает результат нек-рого случайного эксперимента.

Предполагается, что $X_1, \dots, X_n$ — н.о.р. с.в.

Def $\underline{\text{Выборочное пр-во}}$ $\mathcal{X} = \{x\} = \{X(\omega)\} \subseteq \mathbb{R}^n$.

Def $\underline{\text{Реализация выборки}}$ ($\underline{\text{вектор наблюдений}}$) — числовой ~~вер~~ вектор $x = (x_1, \dots, x_n) = X(\omega)$. n — $\underline{\text{объём выборки}}$.

Def. $\underline{\text{Статистика}}$ (или $\underline{\text{оценка}}$) — ф-ция от выборки, не зависящая от неизвестного параметра θ. 15:51

15. Выборочные моменты. Их асимптотическая нормальность.

Def $\underline{\text{Выборочное среднее}}$ $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. $\underline{\text{Выборочная дисперсия}}$ $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.

$A_k \equiv A_k(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^k$ — $\underline{k\text{-й эмпирический (выборочный) момент}}$,

$B_k \equiv B_k(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k$ — $\underline{k\text{-й эмпирический (выборочный) центральный момент}}$.

$\mathbb{E}\bar{X} = a$. $\mathbb{E}S^2 = \mathbb{E}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - a + a - \bar{X})^2 = \mathbb{E}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left((X_i-a)^2 + (\bar{X}-a)^2 - 2(X_i-a)(\bar{X}-a)\right) =$

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i - a)^2 + \underbrace{\mathbb{E}(\bar{X}-a)^2}_{\mathbb{D}\bar{X}} - 2\,\mathbb{E}(\bar{X}-a)^2 = \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} - 2\frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\sigma^2$.

Положим $\mu_k = \mathbb{E}X_1^k$, $m_k \equiv A_k$. $\mathbb{E}m_k = \mu_k$, $\mathbb{D}m_k = \mathbb{E}m_k^2 - \mu_k^2$.

$$m_k-\mu_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k-\mu_k=\frac{\sum_i X_i^k-n\mu_k}{n}=\frac{\sqrt{\mathbb{D}X_i^k}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\sum_i X_i^k-n\mu_k}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{\mathbb{D}X_i^k}}=\{\mathbb{E}m_k^2=\mu_{2k}\}=$$

$$=\frac{\sqrt{\mu_{2k}-\mu_k^2}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\sum_i X_i^k-n\mu_k}{\sqrt{n(\mu_{2k}-\mu_k^2)}}.$$ По ЦПТ $$\frac{\sum X_i^k-n\mu_k}{\sqrt{n(\mu_{2k}-\mu_k^2)}}=\frac{nm_k-n\mu_k}{\sqrt{n}\sqrt{\mu_{2k}-\mu_k^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{n}\,(m_k-\mu_k)}{\sqrt{\mu_{2k}-\mu_k^2}}\xrightarrow{d}\xi\sim N(0,1).$$

<u>Def</u> П-ть с.в. $\{Y_n\}$ <u>асимптотически нормальна</u> с параметрами (a_n, b_n), если $\forall z$ $\mathbb{P}\left(\frac{Y_n-a_n}{b_n}<z\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}du$.

Отсюда $\{m_k\}$ асимптот. нормальна с параметрами $\left(\mu_k, \sqrt{\frac{\mu_{2k}-\mu_k^2}{n}}\right)$.

16. Порядковые статистики. Вариационный ряд. Эмпирическая функция распределения. Их свойства

169, 70, 71, 72

<u>Def</u>. $F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}(X_i<x)$ — <u>эмпирическая функция распределения</u>

$\mathbb{E}F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\mathbb{1}(X_i<x)=F(x)$. В силу ЗБЧ $\forall x$ $F_n(x)\xrightarrow{n.н.}F(x)$.

Эмпирическая ф.р. не позволяет оценить тяжесть хвостов распределения.

$nF_n(x)\sim Bi(n,F(x))$, т.е. $\mathbb{P}(nF_n(x)=k)=C_n^k F(x)^k(1-F(x))^{n-k}$. Отсюда

$\mathbb{E}F_n(x)=F(x)$, $\mathbb{D}F_n(x)=\frac{1}{n}F(x)(1-F(x))\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ $\forall x$, $\xrightarrow[|x|\to\infty]{}0$.

Введём с.в. $D_n=\sup_x|F_n(x)-F(x)|$.

<u>Теорема Гливенко</u> (без д-ва). $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty}D_n=0)=1$.

Вспомним задачу: $\xi\sim F_\xi(x)$ – непр., строго монотонна. Тогда $\eta=F_\xi(\xi)\Rightarrow$

$\Rightarrow\mathbb{P}(\eta<x)=x$, т.е. $\eta\sim R[0,1]$. (*)

<u>У-в</u> Пусть $F(x)$ непр. и строго монотонна. Тогда распр. D_n не зависит от $F(x)$

<u>Д-во</u>. $x=F^{-1}(y)$, $y\in[0,1]$. Тогда $D_n=\sup_{y\in[0,1]}|F_n(F^{-1}(y))-y|=$

$=\sup_{0\le y\le1}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}(X_i<F^{-1}(y))-y\right|=\sup_{0\le y\le1}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}(\underbrace{F(X_i)}_{\eta_i\overset{(*)}{\sim}R[0,1]}<y)-y\right|$ — нет F. □

Пусть $X_1,\dots,X_n$ — н.о.р.с.в. Упорядочим их: $X_{(1)}\le\dots\le X_{(n)}$.

$\mathbb{P}(X_{(n)}<x)=\mathbb{P}(X_1<x,\dots,X_n<x)=(F(x))^n$, $\mathbb{P}(X_{(1)}<x)=1-\mathbb{P}(X_{(1)}\ge x)=$

$=1-\mathbb{P}(X_1\ge x,\dots,X_n\ge x)=1-(1-F(x))^n$.

<u>Def</u> <u>Вариационный ряд</u> — $(X_{(1)},\dots,X_{(n)})$, <u>k-я порядковая статистика</u> — $X_{(k)}$.

$\mathbb{P}(X_{(k)}<x)=?$ Обозначим за $\nu(x)$ число эл-тов выборки, которые попали левее x.

Тогда $\mathbb{P}(X_{(k)}<x)=\mathbb{P}(\nu(x)\ge k)=\{\nu(x)\sim Bi(n,F(x))\}=\sum_{j=k}^{n}C_n^j F(x)^j(1-F(x))^{n-j}$.

<u>Def</u> <u>Выборочная медиана</u> — $\frac{X_{(\frac{n}{2})}+X_{(\frac{n}{2}+1)}}{2}$ для $n⋮2$ и $X_{([\frac{n}{2}]+1)}$ для $n\not⋮2$.

17:18

17. Точечная оценка. Несмещённость, состоятельность.

173

Def. Оценка — статистика, значение к-рой принадлежит параметр. мн-ву Θ.
При точечном оценивании ищут статистику $T=T(X)$, которую при заданной реализации x выборки X принимают за приближённое значение параметра θ.

Def Оценка $T=T(X)$ является несмещённой оценкой параметра θ, если $\mathbb{E}_\theta T(X)=\theta \quad \forall\theta\in\Theta$.
Оценка $T=T(X)$ является несмещённой оценкой $\tau(\theta)$, если
$$\mathbb{E}_\theta T(X)=\tau(\theta) \quad \forall\theta\in\Theta.$$

Def Оценка $T=T(X)$ является состоятельной оценкой параметра θ, если $T(X)\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}_\theta}\theta \quad \forall\theta\in\Theta$.

„Критерий" состоятельности. Пусть $\mathbb{E}_\theta T(X)=a_n(\theta)$, $\mathbb{D}_\theta T(X)=b_n(\theta)$.
Если $a_n(\theta)\to\tau(\theta)$, $b_n(\theta)\to 0$ $\forall\theta$ при $n\to\infty$, то $T(X)$ — состоятельная оценка ф-ции $\tau(\theta)$.

17:37

18. Функция правдоподобия. Достаточные статистики, полные статистики. Критерий факторизации

174, 79-80, 82-83

Предп., что $\mathcal{P}$ обл. след. св-вом: $\forall\theta\in\Theta$ $P_\theta \ll \nu$ для некрой меры ν ($\forall A\in\mathcal{B}_n$, $\forall\theta\in\Theta$ $\nu(A)=0\to P_\theta(A)=0$). В этом случае говорят, что мера ν доминирует семейство $\mathcal{P}$. По т. Радона—Никодима в этом случае $\exists f(x,\theta) \mid P_\theta(A)=\int_A f(x,\theta)\nu(dx)$. $f(x,\theta)$ — плотность.
Например, дискретное распределение Пуассона абс. непр. отн. считающей меры.
Переставим местами аргументы: $f(x,\theta)\to f(\theta;x)$.

Def Пусть $\mathcal{P}$ доминируется мерой ν. Тогда $f(\theta;x)$ называется функцией правдоподобия. $f(\theta;X)$ — правдоподобие параметра θ.

Def Говорят, что статистика $T(X)$ явл. достаточной для параметра θ, если $\mathbb{E}_\theta(X\mid T(X))$ не зависит от θ. В дискр. случае это означает, что $P_\theta(X=x\mid T(x)=t)$ $\forall x,t$ не зав. от θ.

В абс. непр. — $p_{X|T(X)=t}(x,\theta)$ не зав. от θ.

Критерий факторизации. $T(X)$ достаточная $\iff L(\theta;x) = g(\theta, T(x))\cdot h(x)$, где g зависит от x только через T, а h не зависит от θ.

Д-во проведём для дискретного случая.

$\Rightarrow$ $T(X)$ достаточная $\Rightarrow \forall t \ \mathbb{P}_\theta(X=x \mid T(X)=t) = h(x,t)$.

Рассм. такую пару (x,t), что $T(x)=t$. $L(\theta;x) =$

$= \mathbb{P}_\theta(X=x) = \mathbb{P}_\theta(X=x, T(x)=t) = \mathbb{P}_\theta(T(X)=t)\cdot \mathbb{P}_\theta(X=x \mid T(X)=t) =$

$= g(\theta,t)\cdot h(x,t) = g(\theta,T(x))\cdot h(x)$. ∇

$\Leftarrow$ Пусть, что $L(\theta;x) = g(\theta,T(x))\cdot h(x)$. Зафикс. x и $t \mid T(x)=t$.

$$\mathbb{P}_\theta(X=x \mid T(X)=t) = \frac{\mathbb{P}_\theta(X=x, T(X)=t)}{\mathbb{P}_\theta(T(X)=t)} = \frac{\mathbb{P}(X=x)}{\mathbb{P}(T(X)=t)} = \frac{L(\theta;x)}{\sum\limits_{x|T(x)=t} L(\theta;x)} =$$

$$= \frac{g(\theta,T(x))\cdot h(x)}{\sum\limits_{x|T(x)=t} g(\theta,T(x))\cdot h(x)} = \frac{g(\theta,T(x))\cdot h(x)}{\sum\limits_{x|T(x)=t} g(\theta,t)\cdot h(x)} = \frac{g(\theta,t)\cdot h(x)}{g(\theta,t)\sum\limits_{x|T(x)=t} h(x)} = H(x,t) \text{ — не зав. от } \theta.$$ $\square$

Def Стат. $T=T(X)$ называется *полной*, если $\mathbb{E}_\theta g(T) = 0 \ \forall\theta \Rightarrow g \overset{\text{п.н.}}{\equiv} 0$. $(g(T) \overset{\text{п.н.}}{=} 0)$

18:51

175, 78-79

19. Неравенство Рао–Крамера. Эффективные оценки.

Def $U(\theta;x) = \frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\theta;x)$ — *функция вклада*. $U(\theta;X)$ — *вклад выборки* X.

$\mathbb{E}_\theta U(\theta;X) = \int U(\theta;x)L(\theta;x)\lambda(dx) = \int \frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\theta;x)\cdot L(\theta,x)\lambda(dx) =$

$= \int \frac{1}{L(\theta;x)}\frac{\partial}{\partial\theta}L(\theta;x)\cdot L(\theta;x)\lambda(dx) = \int\frac{\partial}{\partial\theta}L(\theta;x)\lambda(dx) =$ {предположим, что выполнены условия регулярности, позволяющие менять порядок интегрирования и дифференцирования, т.е. $L(\theta;x)$ дост. гладкая} $= \frac{\partial}{\partial\theta}\int L(\theta;x)\lambda(dx) = 0$.

Def Пусть $L(\theta;x)$ такова, что $\exists\, \mathbb{E}_\theta U^2(\theta;X) < \infty$. Тогда

$\mathbb{E}_\theta U^2(\theta;X) = \mathbb{D}_\theta U(\theta;X) = i_n(\theta)$ — *фишеровская информация*, содержащаяся в выборке X.

$i_n(\theta) = \mathbb{D}_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\theta;X) = \mathbb{D}_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\ln\prod\limits_{j=1}^n f(X_j;\theta) = \mathbb{D}_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\sum\limits_{j=1}^n \ln f(X_j;\theta) =$

$= \mathbb{D}_\theta\sum\limits_{j=1}^n\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X_j;\theta) = \mathbb{D}_\theta\sum\limits_{j=1}^n U(\theta;X_j) = \sum\limits_{j=1}^n \mathbb{D}_\theta U(\theta;X_j) = n\,i(\theta)$.

Пусть T_τ — класс всех несмещённых оценок ф-ции $\tau(\theta)$.

Неравенство Рао — Крамера. Для регулярных моделей и $\forall$ статистики $T \in \mathcal{T}_\tau$ справедливо след. нер-во: $\mathbb{D}_\theta T(X) \geq \frac{(\tau'(\theta))^2}{i_n(\theta)}$.

Д-во. $\tau(\theta) = \mathbb{E}_\theta T(X) \Rightarrow \tau(\theta) = \int T(x) L(\theta; x) \mu(dx)$.

Продиф-м это тождество по θ: $\tau'(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta} \int T(x) L(\theta; x) \mu(dx) =$

$= \{$условие регулярности$\} = \int T(x) \frac{\partial}{\partial\theta} L(\theta, x) \mu(dx) =$

$= \int T(x) \frac{\partial}{\partial\theta} \ln L(\theta; x) \cdot L(\theta; x) \mu(dx) = \int T(x) U(x; \theta) L(\theta; x) \mu(dx) =$

$= \mathbb{E}_\theta T(X) U(X; \theta) = \{\mathbb{E}_\theta U(X; \theta) = 0\} = \mathrm{cov}_\theta(T(X), U(X; \theta)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{|\rho(\xi, \eta)| \leq 1\} \Rightarrow \{\rho(\xi, \eta) = \frac{\mathrm{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathbb{D}\xi \mathbb{D}\eta}} \Rightarrow |\mathrm{cov}(\xi, \eta)| \leq \sqrt{\mathbb{D}\xi \mathbb{D}\eta}\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\tau'(\theta))^2 \leq \mathbb{D}_\theta T(X) \cdot \mathbb{D}_\theta U(X; \theta) = i_n(\theta) \mathbb{D}_\theta T(X) \Rightarrow \mathbb{D}_\theta T(X) \geq \frac{(\tau'(\theta))^2}{i_n(\theta)}$. $\square$

Def. (Несмещённая!) Оценка, обращающая неравенство Рао — Крамера в равенство, называется *эффективной*. Эффективность оценки $T(X)$: $\mathrm{eff}(T) = \frac{1}{\mathbb{D}_\theta T(X) \, i_n(\theta)}$.

Следствие. Оценка $T(X)$ эффективна $\Leftrightarrow T(X) = \tau(\theta) + a(\theta) U(X, \theta)$.

Д-во. $\rho(\xi, \eta) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{P}(\eta = a\xi + b) = 1$. Учитывая то, что $\mathbb{E}_\theta T(X) = \tau(\theta)$, а $\mathbb{E}_\theta U(X; \theta) = 0$, получаем, что $T(X) = \tau(\theta) + a(\theta) U(X; \theta)$. $\square$

20. Теорема Рао — Блекуэлла — Колмогорова. Оптимальность оценок, являющихся функцией полной достаточной статистики.

Л22-23

Теорема ~~Рао~~ Блекуэлла — Колмогорова. Пусть $S(X)$ — несмещённая оценка параметра θ, $T(X)$ — достаточная статистика. Введём с.в. $U(X) = \mathbb{E}_\theta(S(X) | T(X))$. Тогда $\mathbb{D}_\theta U(X) \leq \mathbb{D}_\theta S(X)$.

Д-во. $\mathbb{E}_\theta U(X) = \mathbb{E}_\theta \mathbb{E}_\theta(S(X) | T(X)) = \mathbb{E}_\theta S(X) = \theta$. Проверим, что $U(X)$ — статистика, т.е. не зависит от θ: $\mathbb{E}_\theta(S(X) | T(X))$ не зависит от θ по определению достат. статистики.

$\mathbb{D}_\theta U(X) = \mathbb{E}_\theta (U(X) - \theta)^2$. $\mathbb{D}_\theta S(X) = \mathbb{E}_\theta (S(X) - \theta)^2 =$

$= \mathbb{E}_\theta (S(X) + U(X) - U(X) - \theta)^2 = \overbrace{\mathbb{E}_\theta (S(X) - U(X))^2 + 2\mathbb{E}_\theta (S(X) - U(X))(U(X) - \theta)}^{\geq 0} +$

$+ \underbrace{\mathbb{E}_\theta (U(X) - \theta)^2}_{\mathbb{D}_\theta U(X)}$. $\mathbb{E}_\theta (S(X) - U(X))(U(X) - \theta) \overset{?}{=} 0$. $\mathbb{E}_\theta (S(X) - U(X))(U(X) - \theta) =$

$= \mathbb{E}_\theta \mathbb{E}_\theta ((S(X) - U(X))(U(X) - \theta) | T(X)) = \mathbb{E}_\theta ((U(X) - \theta) \mathbb{E}_\theta (S(X) - U(X) | T(X))) =$

$= \mathbb{E}_\theta ((U(X) - \theta)(\underbrace{\mathbb{E}_\theta (S(X) | T(X))}_{U(X)} \overset{\text{измер. отн. } \sigma(T(X))}{-} \underbrace{\mathbb{E}_\theta (U(X) | T(X))}_{U(X)}) \overset{\text{ма?}}{=} 0$. $\square$

Т. Лемана — Шеффе. Пусть $T(X)$ — ПДС, S_1 и S_2 — несмещ. оценки. $U_1(X) = \mathbb{E}_\theta(S_1(X) \mid T(X))$, $U_2(X) = \mathbb{E}_\theta(S_2(X) \mid T(X))$. Тогда $U_1(X) \overset{п.н.}{=} U_2(X)$.

Д-во. $\theta = \int U_1(x)\, L(\theta; x)\, \lambda(dx)$, $\theta = \int U_2(x)\, L(\theta, x)\, \lambda(dx) \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 = \int (U_1(x) - U_2(x))\, L(\theta, x)\, \lambda(dx) \overset{полнота}{\Rightarrow} U_1(X) \overset{п.н.}{=} U_2(X)$. $\square$

Def. Несмещённая оценка $S_1(X)$ такая, что $\forall$ несмещ. $S_2(X)$ $\mathbb{D}_\theta S_1(X) \leq \mathbb{D}_\theta S_2(X)$, называется несмещённой оценкой с равномерно минимальной дисперсией или оптимальной.

Следствие. Любая ПДС является опт. оценкой своего мат. ожидания.

Т. Рао — Блекуэлла — Колмогорова. Оптимальная оценка, если она существует, является функцией от достаточной статистики.

Д-во. $\mathbb{E}_\theta(S(X) \mid T(X))$ — ф-ция от $T(X)$. (Неважно, какая S?)

Т. Колмогорова. Всякая ф-ция от ПДС является опт. оценкой своего математического ожидания.

20-31

Т. Колмогорова у Ишакова. Пусть $T(X)$ — ПДС. Тогда $\varphi(T(X))$ оптимально оценивает $\tau(\theta) \Leftrightarrow \mathbb{E}_\theta \varphi(T(X)) = \tau(\theta)$.

Д-во. $\varphi_1(T(X))$ и $\varphi_2(T(X))$ — несмещ. оценки $\tau(\theta) \overset{ПДС}{\Rightarrow} \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \overset{п.в.}{=} 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow T(X) = \varphi_1(T(X)) = \varphi_2(T(X))$. $\square$

21. Метод моментов. Свойства оценок, полученных методом моментов

190-91
Ул 113

Введём обозначения $\mu_k(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k\, dF(x, \theta) = \mathbb{E}_\theta X_i^k$, $m_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$.

Предположим, что θ — r-мерный параметр, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$.

$$\begin{cases} \mu_1(\theta) = m_1, \\ \dots \\ \mu_r(\theta) = m_r. \end{cases}$$

Оценкой метода моментов называется решение этой системы.

Т. Пусть $h(x)$ — непр. ф-ция и $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Тогда $h(Y_n + a) \xrightarrow{\mathbb{P}} h(a)$.

Д-во. $\forall \varepsilon > 0\ \underbrace{\exists \delta > 0 \mid |y| < \delta \Rightarrow |h(a+y) - h(a)| < \varepsilon}_{A}$. При фикс. $\varepsilon > 0$
$\mathbb{P}(|h(a + Y_n) - h(a)| \geq \varepsilon) = \overbrace{\mathbb{P}(\overline{A} \cap \{|Y_n| < \delta\})}^{0} + \mathbb{P}(\overline{A} \cap \{|Y_n| \geq \delta\}) \leq \mathbb{P}(|Y_n| \geq \delta) \to 0$ $\square$

Т. Пусть $\hat\theta_1, \dots, \hat\theta_r$ — непр. ф-ции от моментов: $\hat\theta_i = \psi_i(m_{j_1}, \dots, m_{j_r})$. Тогда оценки, полученные методом моментов с моментами порядков $j_1, \dots, j_r$, будут состоятельными и асимпт. несмещёнными.

Д-во. По ЗБЧ $\forall k$ $m_{j_k} \xrightarrow{P} \mu_{j_k}(\theta) \xrightarrow{\forall i \in C}$ при $n \to \infty$ оценки $\overset{P}{сх.}$ к θ_i. $\square$

22. Метод максимального правдоподобия. Свойства оценок максимального правдоподобия

183-184, 185-188

Def $T(X)$ — <u>асимптотически несмещённая оценка</u>, если $\mathbb{E}_\theta T(X) \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$.

Def <u>Оценка максимального правдоподобия</u> — $\hat\theta \mid L(\hat\theta; X) \geq L(\theta, X)$ $\forall \theta \in \Theta$. $(\hat\theta(X))$

Утв. Предположим, что $L(\theta, x)$ диф-ма по θ, и её минимум по θ достигается в какой-то внутр. точке Θ. Предп., что $\exists$ эфф. оценка $T(X)$. Тогда $\hat\theta = T(X)$.

Д-во. $T(X) = \theta + a(\theta) U(X;\theta) \Rightarrow \frac{T(X)-\theta}{a(\theta)} = \frac{\partial}{\partial\theta} \ln L(\theta, X)$. $\frac{\partial}{\partial\theta} \ln(L(\hat\theta; X)) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{T(X)-\hat\theta}{a(\hat\theta)} = 0$, $a \neq 0$, иначе T — не статистика $\Rightarrow T(X) = \hat\theta$. $\square$

Эфф. оценки $\exists$ только в условиях регулярности. Но нер.-ву РК они неулучшаемы $\Rightarrow$ оптимальны. Т.е. эфф. $\Rightarrow$ опт., а обратно только при усл. рег.

<u>Св-ва ОМП</u> ① Если $\exists T(X)$ — эфф. оценка θ, то $\hat\theta = T(X)$.

② ОМП может быть не единственной.

③ Если $T(X)$ — достат. статистика и $\exists! \hat\theta$ — ОМП, то $\hat\theta$ — ф-ция от T.

Д-во. $T(X)$ — дост. ст. $\Rightarrow$ по кр. факт. $L(X;\theta) = g(T(X),\theta)\cdot h(X) \to \max\limits_\theta \Rightarrow$
$\Rightarrow g(T(X),\theta) \to \max\limits_\theta \Rightarrow \max\limits_\theta L$ зависит от X только через статистику. $\square$

④ Метод макс. правдоподобия может давать не несмещ. оценку.

Утв. $i(\theta) = -\mathbb{E}_\theta \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln p(X_1, \theta)$.

Д-во $1 = \int p(x,\theta)\,dx \overset{\frac{\partial}{\partial\theta}}{\Rightarrow} 0 = \int \frac{\partial p(x,\theta)}{\partial\theta}\,dx = \int \frac{\partial \ln p(x,\theta)}{\partial\theta} p(x,\theta)\,dx \overset{\frac{\partial}{\partial\theta}}{\Rightarrow}$
$\overset{\frac{\partial}{\partial\theta}}{\Rightarrow} 0 = \int \frac{\partial^2 \ln p(x,\theta)}{\partial\theta^2} p(x,\theta)\,dx + \int \left(\frac{\partial \ln p(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2 p(x,\theta)\,dx =$
$= \mathbb{E}_\theta \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln p(X_1,\theta) + i(\theta)$. $\square$

<u>Асимптотические св-ва ОМП.</u> ① Пусть F регулярна, $\exists \frac{\partial^3 \ln p(x,\theta)}{\partial\theta^3}$ (без д-ва)
и $\exists M(x) \mid \left|\frac{\partial^3 \ln p(x,\theta)}{\partial\theta^3}\right| \leq M(x)$ и $\mathbb{E}_\theta M(X_1) < \infty$. Тогда ОМП $\hat\theta_n$ — состоят. оценка θ.

② При выполнении тех же условий ОМП $\hat\theta_n$ <u>асимптотически нормальна</u>, т.е. $\sqrt{n}(\hat\theta_n - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi \sim N\left(0, \frac{1}{i(\theta)}\right)$.

Д-во. Разложим $U_n(X,\theta)$ $(U_n(\theta))$ в ряд Тейлора по θ в т. $\hat\theta_n$:
$U_n(\theta) = \underbrace{U_n(\hat\theta_n)}_{0, \text{ т.к. ОМП}} + U_n'(\hat\theta_n)(\theta - \hat\theta_n) + \frac{U_n''(\theta^*)}{2}(\theta - \hat\theta_n)^2$, где $\theta^* \in [\min(\theta,\hat\theta_n), \max(\theta,\hat\theta_n)]$.

Перепишем: $0 = U_n(\hat\theta_n) = U_n(\theta) + U_n'(\hat\theta_n)(\hat\theta_n - \theta) - \frac{1}{2} U_n''(\theta^*)(\hat\theta_n - \theta)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \hat{\theta}_n - \theta = \frac{-U_n(\theta)}{U_n'(\hat{\theta}_n) - \frac{1}{2}U_n''(\theta^*)(\hat{\theta}_n - \theta)} \Rightarrow \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) = \frac{U_n(\theta)}{\sqrt{n}\, i(\theta)}\Big(-\frac{U_n'(\hat{\theta}_n)}{n\, i(\theta)} + \overbrace{\frac{U_n''(\theta^*)(\hat{\theta}_n-\theta)}{2n\, i(\theta)}}^{\varepsilon_n}\Big)^{-1}.$$

Оценим $|\varepsilon_n|$. $|\varepsilon_n| = \left|\frac{U_n''(\theta^*)}{2n\, i(\theta)}\right| \cdot |\hat{\theta}_n - \theta|$. $|U_n''(\theta^*)| = \left|\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\frac{\partial \ln L_n(X;\theta)}{\partial\theta}\right)\right| =$

$= \left|\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\frac{\partial \ln \prod p(X_i,\theta)}{\partial\theta}\right)\right| = \left|\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\sum \ln p(X_i,\theta)\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^n \frac{\partial^3}{\partial\theta^3}\ln p(X_i,\theta)\right| \le$

$\le \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}\ln p(X_i,\theta)\right| \le \sum_{i=1}^n M(X_i) \Rightarrow |\varepsilon_n| \le \frac{|\hat{\theta}_n - \theta|}{2 i(\theta)} \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n M(X_i)$.

По св-ву 1 $|\hat{\theta}_n - \theta| \xrightarrow{P_\theta} 0$, по ЗБЧ $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n M(X_i) \xrightarrow{P_\theta} E_\theta M(X_1)$.

Отсюда $|\varepsilon_n| \xrightarrow[n\to\infty]{P_\theta} 0$ $(\eta_n \xrightarrow{d} \eta,\ \xi_n \xrightarrow{P} 0 \Rightarrow \eta_n\xi_n \xrightarrow{P} 0)$.

$\frac{U_n'(\theta)}{n} = \frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial \ln L(X,\theta)}{\partial\theta}\right)\Big|_{\theta=\hat{\theta}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln p(X_i,\theta)\Big|_{\theta=\hat{\theta}} \xrightarrow[\text{ЗБЧ}]{P_\theta} E_\theta \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln p(X_1,\theta)$,

если это E конечно, а оно $= -i(\theta) \Rightarrow -\frac{U_n'(\theta)}{n\, i(\theta)} \xrightarrow{P_\theta} 1$. Осталось разобраться

с $\frac{U_n(\theta)}{\sqrt{n}\, i(\theta)}$. $= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(X_i,\theta) = \{\xi_i = \frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(X_i,\theta),\ E\xi_i = 0,\ D\xi_i = i(\theta)\} =$

$= \frac{\sum \xi_i}{\sqrt{n}\sqrt{i(\theta)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{i(\theta)}} \xrightarrow[\text{ЦПТ}]{d} N(0, \frac{1}{i(\theta)})$. Итого, по свойствам сх-ти

$(\eta_n \xrightarrow{d} \eta,\ \xi_n \xrightarrow{P} c \Rightarrow \eta_n\xi_n \xrightarrow{d} c\eta)$ $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} \xi \sim N(0, \frac{1}{i(\theta)})$. $\square$

23. Доверительные интервалы. Метод центральной случайной величины и использование точечной оценки

191-93

Ранее мы находили оценку $T(X) \approx \theta$. Сейчас научимся при фиксированном θ искать статистики $T_1(X)$ и $T_2(X)$ так, чтобы $P_\theta(T_1(X) \le \theta \le T_2(X)) \ge \gamma$.

Def Интервал вида $[T_1(X), T_2(X)]$, концы к-рого явл. статистиками и к-рый удовл. нер-ву $P_\theta(T_1(X) \le \theta \le T_2(X)) \ge \gamma\ \forall \theta \in \Theta$, называется доверительным интервалом для параметра θ.

— Предположим, что $S(X;\theta)$ — с.в., распределение к-рой не зависит от θ и монотонна по θ: $P_\theta(S(X,\theta) < x) = G(x)$. Будем называть её центральной с.в. Предп., что мы выбрали два числа P_1 и P_2: $0 < P_1 < P_2 < 1$ и $S(X;\theta)$ непр-на. Возьмём s_1 и s_2: $G(s_1) = P_1$, $G(s_2) = P_2$. $P(s_1 \le S(X,\theta) \le s_2) = P_2 - P_1$.

Пусть $p(x)$ — плотность распределения и $\int_a^b p(x)\,dx = \gamma$. $b - a \to \min$. $\underset{\text{ф.р.}}{F(b) - F(a)} = \gamma$.

Решим задачу на условный экстремум. $\psi(a,b,\lambda) = b - a - \lambda(F(b) - F(a) - \gamma)$.

$\frac{\partial\psi}{\partial a} = -1 + \lambda p(a) = 0$, $\frac{\partial\psi}{\partial b} = 1 - \lambda p(b) = 0 \Rightarrow p(a) = p(b) = \frac{1}{\lambda}$.

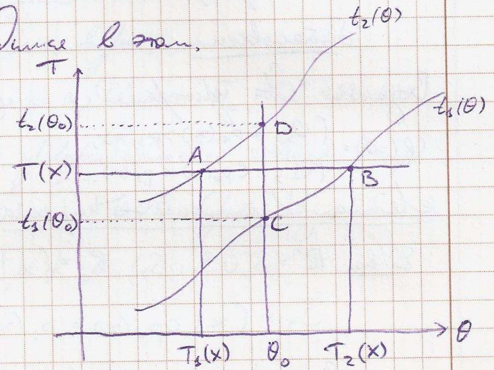
Т.е. концы оптимального доверительного интервала нужно выбирать так, чтобы плотности на концах были одинаковы. В симм. случае $P_2 = 1 - P_1$.

— Теперь будем считать, что все распределения гладкие, а функции гладкие и монотонные, $0 < P_1 < P_2 < 1$. Введём функции $t_1(\theta)$: $\mathbb{P}_\theta(T(X) \le t_1(\theta)) = P_1$,

$t_2(\theta)$: $\mathbb{P}_\theta(T(X) \le t_2(\theta)) = P_2$. $\quad \mathbb{P}(t_1(\theta) \le T(X) \le t_2(\theta)) = P_2 - P_1$.

Возьмём $T_1(X) = t_2^{-1}(T(X))$, $T_2(X) = t_1^{-1}(T(X))$. Тогда $\forall \theta$

$\mathbb{P}_\theta(T_1(X) \le \theta \le T_2(X)) = P_2 - P_1$ — убедимся в этом.



Если $\theta_0 \in [T_1(X), T_2(X)]$, то

$AB \cap CD \ne \varnothing$ и тогда $T(X) \in [t_1(\theta_0), t_2(\theta_0)]$.

Если $\theta_0 \notin [T_1(X), T_2(X)]$, то $AB \cap CD = \varnothing$

и $T(X) \notin [t_1(\theta_0), t_2(\theta_0)]$. Убедимся.

Получим доверительный интервал.

Замечание. Называть $S(X; \theta)$ центральной статистикой

неверно, т.к. она зависит от θ.

24. Проверка гипотез. Лемма Неймана — ~~Пф~~ Пирсона.

193, 94
97-102

Рассм. стат. структуру $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \mathcal{P})$, $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\theta \mid \theta \in \Theta\}$.

Def. Статистической гипотезой называется подмн-во мн-ва $\mathcal{P}$, $H = \mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{P}$.

Если это мн-во состоит из единственного элемента, гипотеза называется

простой, в противном случае — сложной.

Def Критерием называется статистика $\varphi(X) \in [0, 1]$.

Смысл: при $X = x$ гипотезу отвергаем с вер-тью $\varphi(x)$.

Если $\varphi(X) \in \{0, 1\}$, критерий называется нерандомизированным.

$K = \{x \mid \varphi(x) = 1\}$ — критическое множество.

Ошибка I рода: H отвергаем, а она верна. Её вер-ть обозначим α.

$\alpha = \alpha(h) = \mathbb{E}_h \varphi(X)$, $h \in H$. **Def.** $\sup\limits_{h \in H} \alpha(h)$ — уровень значимости.

Ошибка II рода: H принимаем, а она неверна. Её вер-ть — $\beta = \mathbb{E}_h(1 - \varphi(X)) = \beta(h)$, $h \in \overline{H}$. **Def** $\gamma(h) = 1 - \beta(h)$ — мощность критерия

Пусть есть две простые гипотезы H_0 и H_1, $\mathcal{P} = H_0 \cup H_1$.

$H_0: p(x) = p_0(x)$, $\quad H_1: p(x) = p_1(x)$

Def $\ell = \frac{p_0(x)}{p_1(x)}$ — <u>отношение правдоподобия</u>, $L = \frac{p_0(X)}{p_1(X)}$.

Любой критерий, монотонный по отношению правдоподобия, называется <u>байесовским</u>.

Возьмём два критерия φ и φ^* уровня α: $\mathbb{E}_0 \varphi(X) = \mathbb{E}_0 \varphi^*(X) = \alpha$,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & c p_0(x) > p_1(x); \\ 1, & c p_0(x) < p_1(x). \end{cases}$$

<u>Лемма Неймана — Пирсона.</u> Для таких φ и φ^* $\mathbb{E}_1(1-\varphi(X)) \le \mathbb{E}_1(1-\varphi^*(X))$.

<u>Док-во.</u> $\mathbb{R}^n = S_0 \cup S_1 \cup S_2$, $S_0 = \{x \mid c p_0(x) > p_1(x)\}$, $S_1 = \{x \mid c p_0(x) < p_1(x)\}$,

$S_2 = \{x \mid c p_0(x) = p_1(x)\}$.

$x \in S_2 \Rightarrow (\underset{\{0,1\}}{\varphi^*(x)} - \varphi(x))(p_1(x) - c p_0(x)) = 0$

$x \in S_0 \Rightarrow (\varphi^*(x) - \overset{0}{\varphi(x)}) p_1(x) \le c(\varphi^*(x) - \varphi(x)) p_0(x)$.

$x \in S_1 \Rightarrow$ —"—

$$\int\limits_{S_0 \cup S_1 \cup S_2} (\varphi^*(x) - \varphi(x))(p_1(x) - c p_0(x))\,\nu(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\varphi^*(x) - \varphi(x)) p_1(x)\,\nu(dx) -$$
$$- c \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\varphi^*(x) - \varphi(x)) p_0(x)\,\nu(dx) \le 0 \Leftrightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\varphi^*(x) - \varphi(x)) p_1(x)\,\nu(dx) \le$$
$$\le c \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\varphi^*(x) - \varphi(x)) p_0(x)\,\nu(dx) = c \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi^*(x) p_0(x)\,\nu(dx)}_{\alpha} - c \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) p_0(x)\,\nu(dx)}_{\alpha}$$
$$= 0.$$

$\mathbb{E}_1(1 - \varphi(X)) \overset{?}{\le} \mathbb{E}_1(1 - \varphi^*(X)) \Leftrightarrow \mathbb{E}_1 \varphi(X) \ge \mathbb{E}_1 \varphi^*(X)$,

а мы это и доказали. □

Что делать в дискретном случае, если $c p_0(x) = p_1(x)$? $T = \frac{p_1(X)}{p_0(X)}$ — дискр. с.в.

$t_T(\alpha^\circ)$ — квантиль T порядка α°. В лемме НП возьмём $c = t_T(1-\alpha)$.

$$\varphi(X) = \varphi(T) = \begin{cases} 1, & T > c; \\ 0, & T < c; \\ \gamma(\alpha, c), & T = c. \end{cases} \qquad \mathbb{E}_0 \varphi(X) = \mathbb{E}_0 \varphi(T) = \alpha.$$

$$\alpha = \mathbb{E}_0 \varphi(T) = \sum_k \varphi(t_k) \mathbb{P}_0(T = t_k) = \sum_{k:\, t_k < c} \overset{0}{\varphi(t_k)} \mathbb{P}_0(T = t_k) + \varphi(c) \mathbb{P}_0(T = c) +$$
$$+ \sum_{k:\, t_k > c} \overset{1}{\varphi(t_k)} \mathbb{P}_0(T = t_k) = \varphi(c) \mathbb{P}_0(T = c) + \mathbb{P}_0(T > c) = \alpha \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi(c) = \frac{\alpha - \mathbb{P}_0(T > c)}{\mathbb{P}_0(T = c)} = \gamma(\alpha, c).$$

Что делаем на практике:

1) вычисляем $c = t_T(1-\alpha)$; 2) сравниваем $c p_0(x)$ и $p_1(x)$:

$>$ ⇒ принимаем H_0, $<$ ⇒ принимаем H_1, $=$ ⇒ кидаем монетку с вер-тью $\gamma(\alpha, c)$.

25. Критерий согласия Колмогорова

194-95

$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}(X_i < x)$. $H_0: F = F_0$, $F(x) = \mathbb{P}(X_1 < x)$.

$D_n = \sup_x |F(x) - F_n(x)|$ имеет распределение, не зависящее от F. (не зав. от выборки)

Если H_0 верна, то $D_n^* = \sup_x |\underbrace{F_0(x) - F_n(x)}_{K_n(x)}|$ — статистика.

Значения D_n^* маленькие $\Rightarrow H_0$, скорее всего верна.

Нерандомизированный критерий: выберем k и $D_n^* \geq k \Rightarrow \overline{H_0}$, $D_n^* < k \Rightarrow H_0$.

Кр согл Колмогорова нельзя использовать для проверки согласия с дискр распр.

Как выбрать k? Например, $\alpha = 0.01$ или 0.05 (уровень. невозм. событие),

$k_n(\alpha)$ — такое, что $K_n(k_n(\alpha)) = 1-\alpha$, $k = k_n(\alpha)$.

$\mathbb{P}_0(D_n^* \geq k_n(\alpha)) = \alpha$.

<u>Замечание</u>. Если также попытаться увести для $F_0(x, \theta)$ с заменой θ на $\theta = \theta(X)$, то $F_0(x)$ будет зависеть от выборки, и распределение D_n^* будет уже не $K_n(x)$. Т.е. с помощью крит. согласия Колмогорова нельзя проверять сложные гипотезы.

26. Критерий согласия χ^2

195-96

$H_0: F = F_0$. Для начала будем считать, что эта гипотеза простая.

$a \quad \Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \Delta_3 \quad \ldots \quad \Delta_m \quad b$ — m подинтервалов. $\nu_i = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}(X_j \in \Delta_i)$.

$p_i^* = \mathbb{P}_0(X_1 \in \Delta_i)$. $X^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(\nu_i - np_i^*)^2}{np_i^{*2}}$.

<u>Т. Пирсона</u>. $\mathbb{P}_0(X^2 < x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^x g_{m-1}(y)\,dy$, где $g_m(y) = \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(\frac{m}{2})} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-x/2}$ — $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{m}{2})$ — <u>распределение χ^2 с m степенями свободы</u>.

$H_0: \nu_i \sim Bi(n, p_i^*) \Rightarrow np_i^* = E\nu_i$. Гипотезе H_0 соотв. маленькие значения X^2.

Выберем число k. $X^2 \geq k \Rightarrow \overline{H_0}$, $X^2 < k \Rightarrow H_0$. Обозначим $\int_0^x g_m(y)\,dy = G_m(x)$.

$G_{m-1}(\chi_{m-1}(\alpha)) = 1-\alpha$, $k = \chi_{m-1}(\alpha)$. Вер-ть того, что гипотезу отвергнем в том случае, когда она верна. $\mathbb{P}_0(X^2 > \chi_{m-1}(\alpha)) \approx \alpha$.

<u>Утв</u>. $Y_i \sim N(0, 1)$, $Y_1, \ldots, Y_m$ — н.о.р.с.в. $\Rightarrow Y_1^2 + \ldots + Y_m^2$ имеет распр. χ^2.

Оказывается, можно проверять и сложные гипотезы. H. $F = F_0(\cdot, \theta)$, $p_i^* = \mathbb{P}_0(X_1 \in \Delta_i, \theta)$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_r)$. <u>Т. Фишера</u>. $\mathbb{P}_0(X^2 < x) \xrightarrow[n\to\infty]{} G_{m-r-1}(x)$ в предп., что $\hat{\theta}$ — полиномиальная ОМП:

$\mathbb{P}(\nu_1 = k_1, \ldots, \nu_m = k_m) = \frac{n!}{k_1! \ldots k_m!} p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m}$, $k_1 + \ldots + k_m = n$ — максим-ть нужно эту ф-цию правдоподобия.

$p_i = \mathbb{P}_\alpha(X_1 \in \Delta_i; \theta)$

$p_i = p_i(\theta)$, подст. $k_i = \nu_i$.

□□. Указатель того, что не вошло в билеты

A. Л21–25. Интеграл Лебега, мера Лебега, т. Радона–Никодима

B. Л40–41, 42–44, 45–48. Распределения случайных величин

C. Л60–61. Теоремы Ляпунова и Линдеберга–Феллера.

D. Л72–73. Непараметрические оценки плотности

E. Л103–105. Стохастический анализ нормальных выборок.

<u>Т. Колмогорова.</u> Пусть $F(x)$ непрерывна. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(\sqrt{n} D_n < x) = K(x) =$
$$= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j e^{-2j^2x^2}.$$

$\mathbb{E}\left(\frac{\xi-\mathbb{E}\xi}{\sqrt{\mathbb{D}\xi}}\right)^4$ — <u>коэффициент эксцесса</u> с. в. ξ.